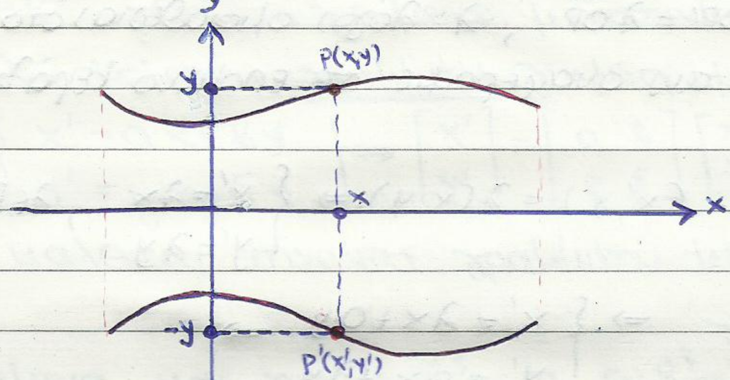
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ – ΣΥΝΟΨΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ:

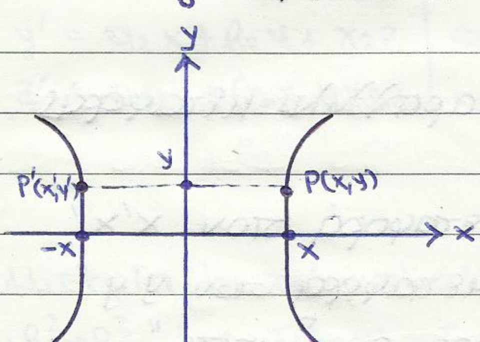
ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία απεικόνιση $\varphi: E \to E$ (συγκεκριμένα $\varphi: R^2 \to R^2$ ή $\varphi: R^3 \to R^3$) που απεικονίζει στοιχεία P (συγκεκριμένα $P(x,y)$ στο R^2) σε άλλα στοιχεία P' (συγκεκριμένα $P'(x',y')$ στο R^2) όπου P στο E και P' στο E, λέγεται γεωμετρικός μετασχηματισμός και γράφουμε $\varphi(x,y) = (x',y')$

Παραδείγματα (θα τα δούμε διεξοδικά στην ύλη)

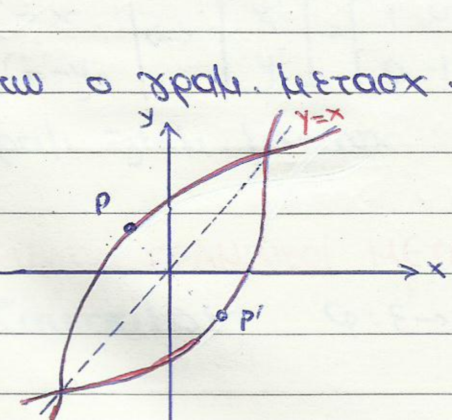
1) Έστω ο γεωμ. μετασχ. $\varphi: R^2 \to R^2$ με $(x,y) \mapsto (x,-y)$
Γραφικά αυτό αναπαρίσταται ως εξής:



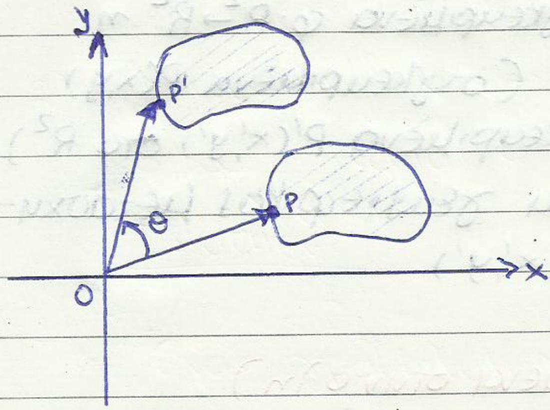
2) Έστω ο γεωμ. μετασχ. $\varphi: R^2 \to R^2$ με $(x,y) \mapsto (-x,y)$



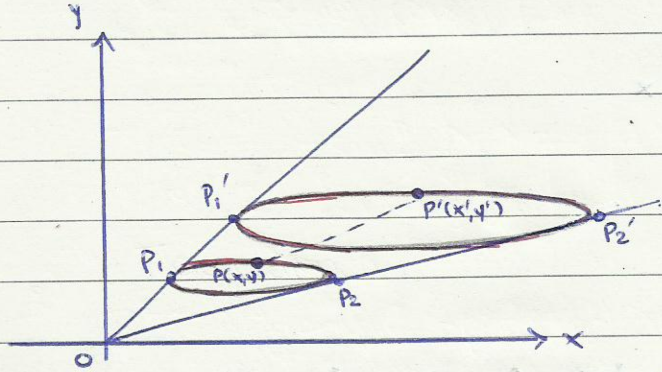
3) Έστω ο γεωμ. μετασχ. $\varphi: R^2 \to R^2$ συμμετρία ως προς την $y=x$
(Ανάκλαση – κατοπτρισμός)



4) Έστω ο γραμ. μετασχ. $\varphi: R^2 \to R^2$ που είναι η στροφή με κέντρο το O και γωνία θ



5) Ο γραμ. μετασχ. $\varphi: R^2 \to R^2$ της ομοιοθεσίας που ικανοποιεί τη σχέση $\vec{OP'} = \lambda \vec{OP}$, λ: λόγος ομοιοθεσίας στο R^+ (και την ομοιοθεσία θα την αναφέραμε σε επόμενο κεφάλαιο)



$$(x', y') = \lambda(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}, \ \lambda \in R^+$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \lambda x + 0 \cdot y \\ y' = 0x + \lambda y \end{cases} \Rightarrow$$

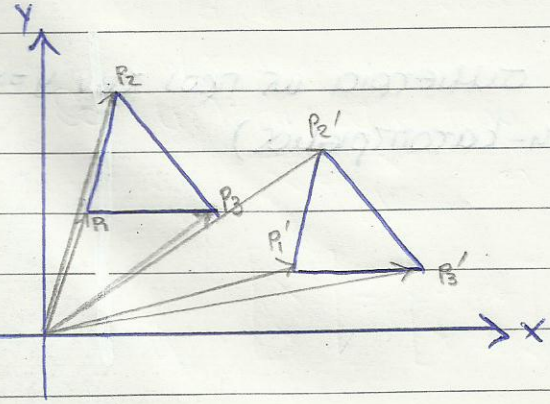
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ γραμ. μετασχηματ.

6) ο γραμ. μετασχ. $\varphi: R^2 \to R^2$ της παράλληλης μεταφοράς τέτοιος ώστε:

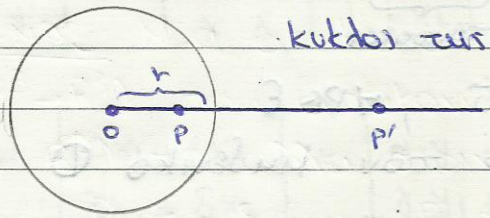
i. $(x, y) \mapsto (x+c, y)$ "παραλ. μεταφορά στον $x'x$"

ii. $(x, y) \mapsto (x, y+c)$ "παραλ. μεταφορά στον $y'y$"

iii) $(x, y) \mapsto (x+c_1, y+c_2)$ "μεταφορά οποιαδήποτε"



7) Ο μετασχηματισμός της Αντιστροφής



κύκλος της Αντιστροφής

(θα το συναντήσουμε παρακάτω)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1η

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ γεωμετρικός μετασχηματισμός.

Πιο συγκεκριμένα για $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$: Έστω ο γεωμετρ. μετασχηματισμός τ/ω : $P(x,y) \mapsto P'(x',y')$

Ο φ καλείται <u>γραμμικός</u> γεωμετρ. μετασχ. αν ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x' = ax + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ όπου ο πίνακας $\begin{bmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

καλείται πίνακας γραμμικού μετασχηματισμού

όμοια, και για $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ η $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμικός γεωμ. μετασχημ. αν ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' = a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' = a_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

<u>Πχ</u>

Συμμετρία / κατοπτρισμός

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\varphi(x,y) = (x,-y)$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

γραμ. γεωμ. μετασχ.

"ΕΙΔΙΚΟΙ" ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

1) Ταυτοτικός : $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ με $\varphi(P) = P$ και $P = (x,y)$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1\cdot x + 0y \\ y' = 0x + 1y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{ταυτοτικός}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2) Μηδενικός : $\varphi: E \to E$ με $\varphi(P) = \vec{0}$, $\forall P \in E$
όπου πίνακας γραμ. μετασχηματισμού τον μηδενικό $\mathbb{O}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

i) Ένας γραμμικός γεωμετρικός μετασχηματισμός απεικονίζει το $\vec{0}$ στο $\vec{0}$.

Αποδ.

Έστω $P'(x', y')$ η εικόνα του $\vec{0}$ μέσω του φ γεωμ. μετασχ.
Ο φ γραμμικός
Τότε,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

Παρατήρηση:
Η παραπάνω πρόταση δουλεύει και σαν αρνητικό κριτήριο για να εξετάσουμε αν είναι γραμμικός.

ii) Ένας γραμμικός γεωμετρικός μετασχηματισμός συμπεριφέρεται καλά ("σέβεται") την πρόσθεση και το βαθμωτό πολ/μος

Αποδ.

Έστω φ γραμ. γεωμ. μετασχ. που περιγράφεται μέσω του πίνακα:
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$. Έστω διανύσματα $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Θα μελετήσουμε που απεικονίζονται μέσω του φ.
Έστω $\vec{x} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ η εικόνα του $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$
Έτσι,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 + \beta x_2 + \beta y_2 \\ \gamma x_1 + \gamma y_1 + \delta x_2 + \delta y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \gamma y_1 + \delta y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A\vec{x_1} + A\vec{x_2}$$

ομοια αποδεικνύεται οτι $\varphi(kA) = k\varphi(A)$
(και προφανώς $A(k\vec{x}) = kA(\vec{x}),\ k \in \mathbb{R}^*$)
Ετσι, απο τα προαναφερθέντα πηγάζει το θεώρημα

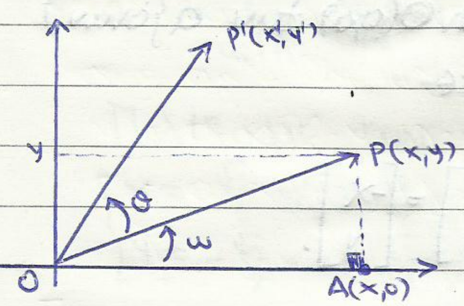
ΘΕΩΡΗΜΑ: Εαν $\varphi: E \to E$ γεωμ. μετασχ. τοτε είναι γραμμικος αν.ν ισχυουν:

i) $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y}$ εν E

ii) $\varphi(\lambda \vec{x}) = \lambda \varphi(\vec{x})$, $\vec{x} \in E$

1ος ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ (ΣΤΡΟΦΗ)

Στροφή κεντρου Ο και γωνιας θ.



$|\vec{OP}| = |\vec{OP'}|$ το P' είναι η εικονα του P

$O\hat{A}P$ ορθογώνιο Ετσι για το P εχουμε

$$\begin{cases} x = \alpha \cos\omega \\ y = \alpha \sin\omega \end{cases}$$

Για το P' έχουμε:

$$\begin{cases} x' = \alpha\cos(\omega+\theta) = \alpha(\cos\omega \cdot \cos\theta - \sin\omega \cdot \sin\theta) = \\ y' = \alpha\sin(\omega+\theta) = \alpha(\sin\omega \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos\omega) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} = (\alpha\cos\omega)\cos\theta - (\alpha\sin\omega)\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta \\ = (\alpha\sin\omega)\cos\theta + (\alpha\cos\omega)\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{με } A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

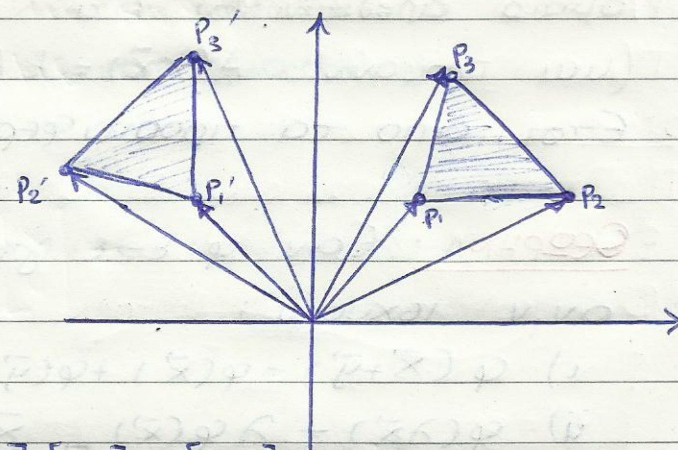
Αντίστοιχα, $A_{-\theta}$ με κέντρο το O είναι

$$A_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα

1) Στροφή $R_{O,\frac{\pi}{2}}$

Εάν $P'(x',y')$ είναι η εικόνα του $P(x,y)$ τότε:

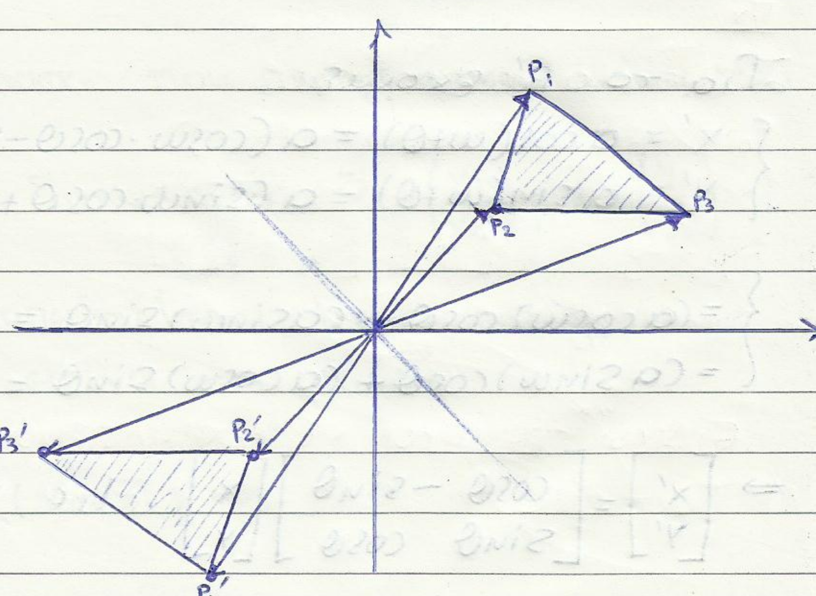


$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

2) Στροφή $R_{O,\pi}$ (συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων)
Εάν $P'(x',y')$ εικόνα του $P(x,y)$ τότε

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



3) Στροφή $R_{O,2\pi}$:

Έχουμε τον πίνακα $A_{2\pi} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ο ταυτοτικός πίνακας δηλ. απεικονίζεται κάθε σημείο στον εαυτό του ($\varphi(P)=P$).

Άσκηση:

Να βρεθεί η εικόνα της καμπύλης (c): $y = \frac{1}{x}$ μέσω των γεωμετρικών μετασχηματισμών φ στροφής με κέντρο το O και γωνία $\frac{\pi}{4}$.

ΛΥΣΗ

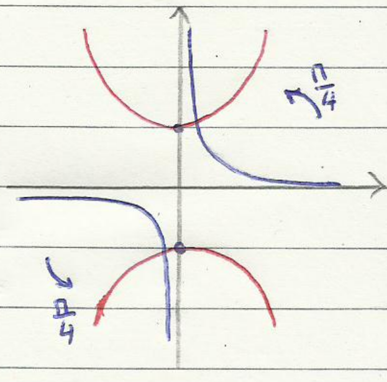
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

Θα πρέπει να λύσουμε ως προς x και y
ο πίνακας A έχει αντίστροφο ($\det A \neq 0$)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}\,A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Πολ/ζουμε την παραπάνω εξίσωση με A^{-1}, άρα προκύπτουν

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases}$$



Αντικαθιστούμε στην (c): $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow y \cdot x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 1 \Leftrightarrow$$

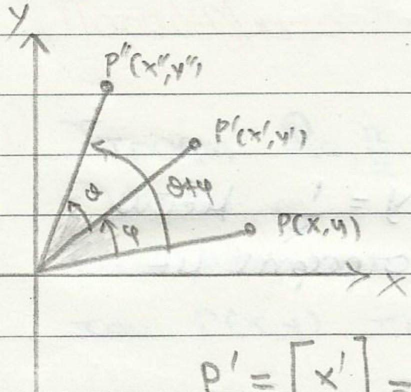
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}(x')^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$ ισοσκελής υπερβολή

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εαν $R_{O,\theta}$ και $R_{O,\varphi}$ μετασχηματισμός στροφής κεντρου O και γωνίες θ και φ αντίστοιχα. Τοτε

$$R_{O,\theta} \circ R_{O,\varphi} = R_{O,\theta+\varphi} = R_{O,\varphi} \circ R_{O,\theta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θδο το σημειο $P''(x'',y'')$ είναι εικόνα του P μέσο ενός γεωμ. μετασχ. αυτου με $R_{O,\theta+\varphi}$

Γνωρίζουμε ότι:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

καθώς επίσης:

$$P'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$